یادآوری مجموعه‌های اعداد

بازه‌ها

دوستای عزیزم، امسال تصمیم داریم که ریاضی دهم رو قدم به قدم با هم یاد بگیریم.
امیدوارم که در کنار هم بتونیم سال تحصیلی خوبی داشته باشیم.☺

سال گذشته با مجموعه‌های مختلفی از اعداد آشنا شدیم. میخوایم یه یادآوری از این مجموعه‌ها داشته باشیم.

اعداد طبیعی (N):

اولین مجموعه‌ای که باهاش آشنا شدیم "مجموعه اعداد طبیعی" هست که با N نمایش داده میشه. اعضای این مجموعه عبارتند از :

N = {۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، .....}

همینطور که می‌بینید مجموعه اعداد طبیعی اعدادی هستن که معمولا ما برای شمارش ازشون استفاده می‌کنیم.

اعداد حسابی (W) :

اگه به مجموعه اعداد طبیعی، عدد صفر رو اضافه کنیم، مجموعه اعداد حسابی ساخته میشه:

W = {۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، .....}

پس مجموعه اعداد حسابی عدد صفر رو داره ولی مجموعه اعداد طبیعی، صفر نداره.

اعداد صحیح (Z) :

اگه ما اعداد منفی رو به مجموعه اعداد حسابی اضافه کنیم، مجموعه اعداد صحیح ساخته میشه.

Z ={.... ، -۵ ، -۴ ، -۳ ، -۲ ، -۱ ، ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، .....}

اعداد گویا (Q) :

این مجموعه رو نمی‌تونیم شبیه اعداد طبیعی و اعداد صحیح، با یه مجموعه از اعداد نشون بریم، چون این مجموعه خیلی گسترده‌س و عضوای زیادی داره. مجموعه اعداد گویا رو به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

هر عددی که بتونیم اونو به صورت یه کسر بنویسیم که:

صورت و مخرجش عدد صحیح باشه و مخرجش مخالف صفر باشه، یه عدد گویاست.

تعریف ریاضی اعداد گویا به صورت زیره:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a\,, b \in \mathbb{Z}\,, b \neq 0\right\}$$

اعداد گنگ (Q') :

عددهایی هستند که ما نمی‌تونیم اونا رو به صورت یه کسر که صورت و مخرجش اعداد صحیح باشن نشون بریم. عددایی مثل عدد π و عددهای رادیکالی که مربع کامل نیستن، مثل:

$\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و ....

اعداد حقیقی(R) :

اگه همه اعداد گنگ و همه اعداد گویا رو توی یه مجموعه بریزیم، مجموعه‌ای به دست میاد که به اون مجموعه اعداد حقیقی گفته میشه.

همه اعدادی که ما تا حالا یاد گرفتیم عضوی از R هستن.

در این قسمت میخوایم درباره رابطه‌ی بین این مجموعه ها با هم صحبت کنیم. این مطالب مربوط به سال گذشته هستن.

(در صورتی که ارتباط بین این مجموعه‌ها رو یادتون مونده، می‌تونید ۴ صفحه‌ای که در ادامه گفته میشه رو مطالعه نکنید)

اول از رابطه بین اعداد طبیعی و اعداد صحیح شروع می‌کنیم، قبول دارید که هر عددی که طبیعی باشه حتما صحیح هم هست؟ اگه قبول ندارید یه بار دیگه مجموعه های زیر رو ببینید:

$\mathbb{N} = \{ ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، .... \}$

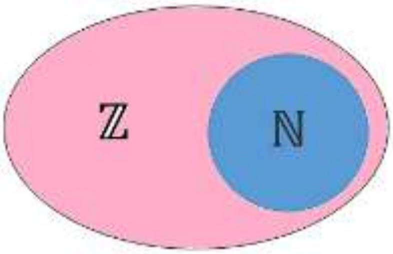
$\mathbb{Z} = \{ ... -۴ ، -۳ ، -۲ ، -۱ ، ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ... \}$

الان هر عددی که توی مجموعه اعداد طبیعی وجود داره توی اعداد صحیح هم هست (با رنگ قرمز مشخصش کردیم) پس نتیجه زیر رو داریم:

"هر عضو مجموعه $\mathbb{N}$ ، به مجموعه $\mathbb{Z}$ نیز تعلق دارد"

این جمله چی رو به ما نشون میده؟ نشون میده که $\mathbb{N}$ زیر مجموعه $\mathbb{Z}$ هست.

بیایم اینو با شکل نشون بریم:



یه نکته رو یادتون باشه، وقتی با شکل قراره نشون بریم که یه مجموعه، زیرمجموعه‌ی یه مجموعه دیگه‌س، اونو باید توی دل مجموعه بزرگه بذاریم، مثلا اینجا چون می‌خواستیم بگیم $\mathbb{N}$ زیرمجموعه $\mathbb{Z}$ هست، اونو کاملا توی $\mathbb{Z}$ گذاشتیم.

تا اینجا ارتباط اعداد طبیعی و اعداد صحیح رو فهمیدیم.

حالا بریم سراغ ارتباط مجموعه‌ی اعداد طبیعی و صحیح با مجموعه اعداد گویا

توی تعریف اعداد گویا گفتیم:

هر عددی را که بتوان به فرم کسری نوشت به طوری که صورت و مخرج اعدادی صحیح و مخرج مخالف صفر باشد، در مجموعه اعداد گویا قرار دارد.

از طرفی می‌دونیم هر عددی که مخرج نداره مخرجش یکه، پس می‌تونیم برای همه اعداد طبیعی و صحیح، مخرج ۱ بذاریم.

$$\mathbb{N}=\{\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{4}{1},\frac{5}{1},\frac{6}{1}....\}$$

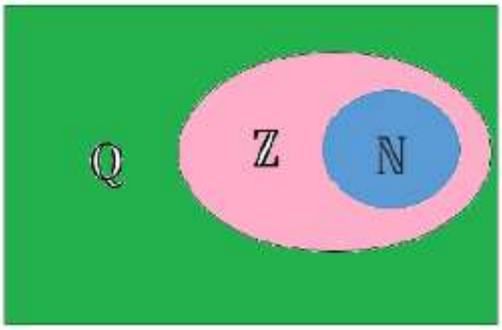
$$\mathbb{Z}=\{....\frac{-3}{1},\frac{-2}{1},\frac{-1}{1},\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{1}....\}$$

حالا دقیقا توی تعریف اعداد گویا صدق میکنن. پس نتیجه می‌گیریم:

هر عضو مجموعه $\mathbb{N}$ و هر عضو مجموعه $\mathbb{Z}$ ، به مجموعه $\mathbb{Q}$ نیز تعلق دارد.

یعنی $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ زیرمجموعه $\mathbb{Q}$ هستند. اگه بخوایم با شکل نشون بدیم چطوری میشه؟

$\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ کاملا داخل $\mathbb{Q}$ قرار میگیرن. شکل زیر رو ببینید:

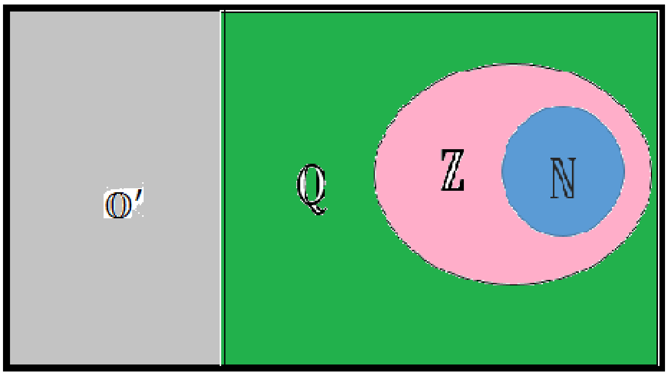


نتیجه هایی که از این شکل می‌تونیم بگیریم(البته قبل از شکل هم توضیح دادیم در موردش):

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \quad , \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \quad , \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$$

حالا نوبت مجموعه اعداد گنگ یا اصمه، مجموعه اعداد گنگ، هیچ ارتباط و اشتراکی با این سه تا مجموعه نداره، اعداد گویا و اعداد اصم هیییییچ اشتراکی با هم ندارن.

اگه بخوایم روی شکل نشون بدیم باید مجموعه اعداد گنگ رو کاملا جدا از اعداد گویا بکشیم، طوری که هیچ اشتراکی با هم نداشته باشن:



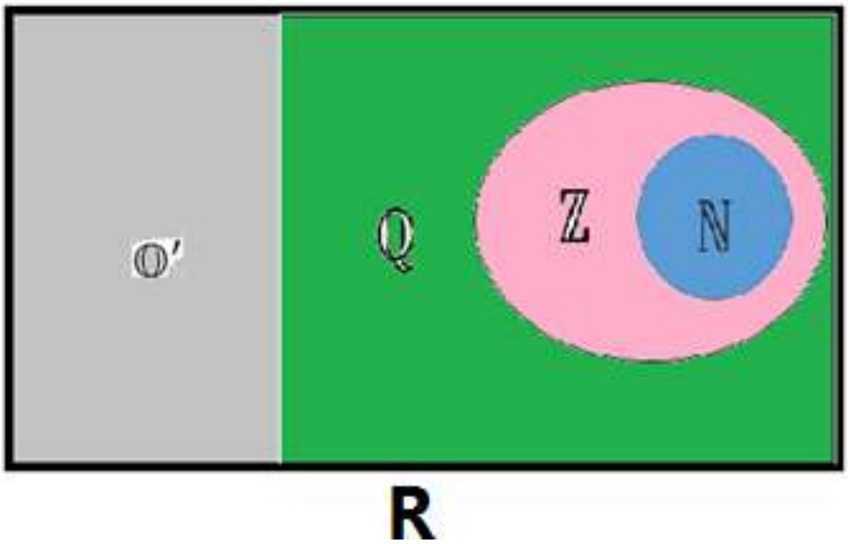
می‌بینید که مجموعه اعداد گویا و اعداد اصم دو مجموعه کاملا مجزا هستن، قسمت سبز اعداد گویا و قسمت خاکستری اعداد اصم.

از این شکل می‌تونیم نتیجه های زیر رو بگیریم:

$\mathbb{Q}' \nsubseteq \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \nsubseteq \mathbb{Q}'$ و $\mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{Q}'$ و $\mathbb{Q} \nsubseteq \mathbb{Q}'$

حالا میخوایم ارتباط این مجموعه‌ها با مجموعه اعداد حقیقی رو ببینیم، گفتیم که اجتماع اعداد گویا و گنگ ، اعداد حقیقی رو میسازه، بنابراین شکل زیر رو داریم.



از این شکل چه نتیجه هایی می‌گیریم؟

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$$

بازه‌ها :

همونطور که گفتیم هرررر عددی که ما تا حالا باهاش آشنا شدیم یه عدد حقیقیه و به این علت می‌تونیم اون رو روی محور اعداد حقیقی نشون بدیم.

از طرف دیگه هرررر نقطه‌ای هم که روی محور اعداد حقیقی در نظر بگیریم نشوندهنده یک عدد حقیقی هست.

فرض کنید که ما میخوایم یه زیرمجموعه از اعداد حقیقی رو نمایش بدیم، مثلا مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین ۲ و ۳

چون تعداد خیلی زیادی (بینهایت) عدد حقیقی بین ۲ و ۳ وجود داره، ما نمی‌تونیم این مجموعه رو با تک تک عضواش نشون بدیم، بنابراین باید از یه روش دیگه برای نمایش استفاده کنیم.

معرفی بازه‌ها:

سه نوع بازه داریم:

بازه باز

بازه بسته

بازه نیم‌باز

حالا دونه دونه مفهوم اینا رو یاد می‌گیریم:

بازه باز:

بازه‌ی باز به این صورت نوشته میشه: (a , b)

معنی این نوع نوشتن اینه که، عددهایی که ابتدا و انتهای بازه قرار میگیرن به بازه تعلق ندارن

مثلا اگه ما بازه (۱ و ۲-) رو داشته باشیم، عددهای ۲- و ۱ متعلق به بازه نیستن.

بازه بسته:

بازه‌ی بسته به این صورت نوشته میشه: [a , b]

معنی این نوع نوشتن اینه که عددهایی که ابتدا و انتهای بازه قرار میگیرن به بازه تعلق دارن

مثلا اگه ما بازه [۱ و ۲-] رو داشته باشیم، عددهای ۲- و ۱ متعلق به بازه هستن.

بازه نیم‌باز:

بازه‌ای که یه سرش باز و یه سرش بسته‌س، به این صورت :

(a , b]   ،   [a , b)

معنی بازه‌ی [a , b) این هست که a به بازه تعلق داره ولی b به بازه تعلق نداره.

معنی بازه‌ی (a , b] این هست که a به بازه تعلق نداره ولی b به بازه تعلق داره.

پس به طور کلی نتیجه می‌گیریم که هر قسمتی که بسته بود به بازه تعلق داره و هر قسمتی که باز بود به بازه تعلق نداره.

روش نمایش بازه‌ها:

هر بازه رو ما به دو روش می‌تونیم نمایش بدیم:

1. نمایش مجموعه‌ای
2. نمایش هندسی یا نمایش روی محور اعداد

نمایش مجموعه‌ای:

در این روش ما باید اعضای یه بازه رو به صورت مجموعه نمایش بدیم و برای این کار هم فقط و فقط کافیه توجه داشته باشید که :

هر جا که بازه باز هست ما در نمایش مجموعه ای، علامت مساوی نداریم و

هر جا که بازه بسته هست ما علامت مساوی رو داریم.

و اینکه چون ما اینجا داریم درباره اعداد حقیقی صحبت می‌کنیم، اعضای مجموعه متعلق به R هستن.

برای نمایش یه بازه به صورت مجموعه‌ای، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

فرض کنید میخوایم $[3 , 7]$ رو به صورت مجموعه‌ای بنویسیم:

گام ۱ . یه آکولاد باز می‌کنیم و می‌نویسیم :

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid \qquad \}$$

گام ۲ . X رو بین اعداد ابتدا و انتهای بازه می‌نویسیم:

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid \ 3 < x < 7 \}$$

توجه داشته باشید که باید ترتیب اعداد رو رعایت کنیم، یعنی عددی که سمت چپ بازه قرار داره، سمت چپ X قرار می‌گیره و عددی که سمت راست بازه قرار داره در سمت راست X قرار می‌گیره.

گام ۳ . هر قسمت از بازه که بصورت بسته هست، ما یه مساوی کنار علامتش میزاریم (یعنی علامت "کوچکتر" رو به "کوچکتر مساوی" تبدیل می‌کنیم)

مثلا در اینجا بازه‌ی ما در قسمتی که ۷ قرار داره، بسته‌س. بنابراین ما هم در قسمتی که ۷ قرار داره علامت "کوچکتر" رو به "کوچکتر مساوی" تبدیل می‌کنیم ، بنابراین جواب نهایی ما به صورت زیر میشه:

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid \ 3 < x \leq 7 \}$$

یه مثال دیگه:

میخوایم بازه [۱ و ۲-] رو به صورت مجموعه‌ای نمایش بدیم:

گام ۱ . یه آکولاد باز می‌کنیم و می‌نویسیم :

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid \qquad \}$$

گام ۲ . X رو بین اعداد ابتدا و انتهای بازه می‌نویسیم:

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid \ -2 < x < 1 \}$$

گام ۳ . هر قسمت از بازه که بصورت بسته هست، ما یه مساوی کنار علامتش میذاریم .

مثلا در اینجا بازه‌ی ما در قسمتی که ۲- و ۱ قرار دارن، بسته‌س. بنابراین ما هم در این قسمتها علامت "کوچکتر" رو به "کوچکتر مساوی" تبدیل می‌کنیم ، بنابراین جواب نهایی به صورت زیر میشه:

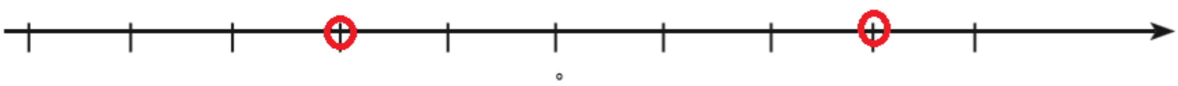
$$\{\, x \in \mathbb{R} \mid \ -2 \ \leq \ x \leq 1 \,\}$$

نمایش هندسی یا نمایش روی محور اعداد:

برای نمایش یه بازه روی محور به صورت زیر عمل می‌کنیم:

فرض کنید که میخوایم $(-2 , 3]$ رو روی محور نمایش بریم:

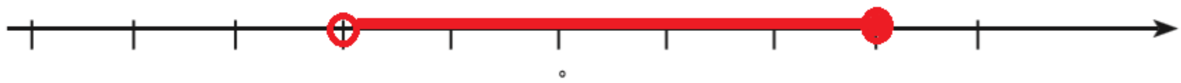
گام ۱ : محور رو رسم می‌کنیم و اعداد ابتدا و انتهای بازه رو با دایره های توخالی روی محور مشخص می‌کنیم.



گام ۲ : دو تا دایره رو به هم وصل می‌کنیم:

گام ۳ :

به ابتدا و انتهای بازه توجه می‌کنیم، هر کدوم که بسته بود، دایره مربوط به اون عدد رو توپر می‌کنیم، در اینجا بازه در قسمت ۳ بسته‌س، پس دایره‌ای که روی عدد ۳ قرار داره رو توپر می‌کنیم:



همه مثالهایی که تا اینجا گفتیم، بازه‌هایی بودن که ابتدا و انتهاشون مشخص بود، ولی همیشه اینطوری نیست، بازه‌هایی وجود دارن که ابتدا یا انتهای مشخصی ندارن. مثلا وقتی میگیم همه اعداد حقیقی بزرگتر از ۵، در واقع ما فقط ابتدای بازه رو مشخص کردیم و بازه انتها نداره.

این بازه‌ها به چه صورتی نوشته میشن؟ نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی اونها چطوریه؟

اول از همه به این شکل دقت کنید:

انتهای سمت راست محور نشون‌دهنده‌ی $+\infty$ و انتهای سمت چپ محور نشون‌دهنده‌ی $-\infty$ هست.

ادامه درس رو با یه مثال همه رو توضیح میدیم:

فرض کنید میخوایم عبارت زیر رو به صورت بازه بنویسیم و بعد نمایش مجموعه‌ای و محوری اون رو هم داشته باشیم:

"همه عددهای حقیقی بزرگتر از ۵ "

بازه مورد نظر به صورت $(5 , +\infty)$ نوشته میشه.

دو تا نکته رو توجه داشته باشید:

نکته اول: صورت سوال به ما گفته "بزرگتر از ۵" پس باید بازه از سمت ۵ باز باشه.
(اگه میگفت "بزرگتر مساوی ۵" اونوقت باید بازه از سمت ۵ بسته می‌شد.)

نکته دوم : بازه همیشه از سمت $+\infty$ و $-\infty$ باز هست.

نمایش به صورت مجموعه :

مطابق روشی که در قسمت قبل گفتیم عمل می‌کنیم با یه سری تغییرات جزئی

گام ۱ . یه آکولاد باز می‌کنیم و می‌نویسیم :

$$\{ x \in \mathbb{R} | \qquad \}$$

گام ۲ . X رو بین اعداد ابتدا و انتهای بازه می‌نویسیم:

$$\{ x \in \mathbb{R} | \; 5 < x < +\infty \}$$

گام ۳ . هر قسمت از بازه که بصورت بسته هست، ما یه مساوی کنار علامتش میذاریم (یعنی علامت "کوچکتر" رو به "کوچکتر مساوی" تبدیل می‌کنیم)

در اینجا هر دو طرف بازه، باز هست بنابراین لازم نیست کاری انجام بریم.

گام ۴ . ما معمولا در این نمایش ، قسمتی که مربوط به ∞ هست رو نمی‌نویسیم،
بنابراین قسمتی که ∞ وجود داره رو پاک می‌کنیم، جواب نهایی به صورت زیر میشه:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x\}$$

یا به صورت زیر:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

ممکنه این سوال براتون پیش بیاد که ما اصلا چرا قسمت مربوط به ∞ رو نوشتیم که بعد مجبور شیم پاکش کنیم؟

علتش اینه که اگه ∞ رو ننویسیم ممکنه جهت علامتها رو اشتباه بذاریم، ولی وقتی X رو بین عدد و ∞ محدود می‌کنیم، احتمال اشتباه کردن خیلی پایین میاد.

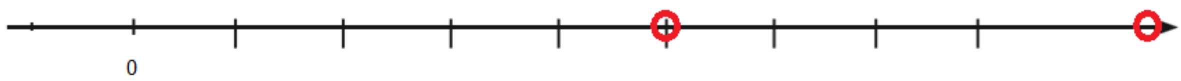
بعد از اینکه تسلط پیدا کردید، می‌تونید از همون اول ∞ رو ننویسید.

نمایش هندسی یا نمایش روی محور:

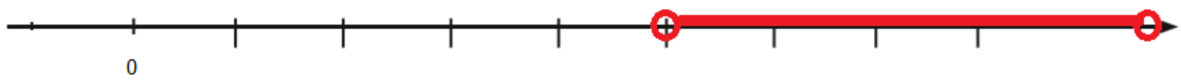
برای نمایش یه بازه روی محور به صورت زیر عمل می‌کنیم:

در اینجا میخوایم $(5, \infty)$ رو روی محور نمایش بدیم.

گام ۱: محور رو رسم می‌کنیم و عدد و ∞ رو با دایره های توخالی روی محور مشخص می‌کنیم.(اگه $+\infty$ بود انتهای سمت راست محور و اگه $-\infty$ بود انتهای سمت چپ محور)



گام ۲ : دو تا دایره رو به هم وصل می‌کنیم:

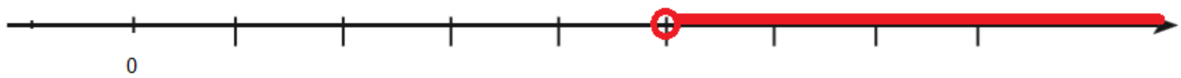


گام ۳ :

به ابتدا و انتهای بازه توجه می‌کنیم، هر کدوم که بسته بود، دایره مربوط به اون عدد رو توپر می‌کنیم، در اینجا بازه در هر دو قسمت بازه، پس کاری انجام نمیدیم

گام ۴ :

دایره مربوط به ∞ رو حذف می‌کنیم.



تا اینجا ما با بازه‌ها و نمایشهای مختلفشون آشنا شدیم. مطلب بعدی که میخوایم یاد بگیریم اجتماع و اشتراک و تفاضل بازه‌هاست.

یکی از بهترین روشها برای محاسبه‌ی اجتماع و اشتراک و تفاضل بازه‌ها استفاده از محوره که در ادامه یاد می‌گیریم.

دوستای عزیز به یه مطلب توجه کنید، ممکنه فکر کنید این روش طولانیه، ولی اینطور نیست، ما چون با جزئیات بهتون یاد میدیم نوشتنش طولانی شده، شما اگه چند تا مثال حل کنید و مسلط بشید توی زمان کوتاهی میتونید این مدل سوالا رو حل کنید.

اشتراک دو بازه:

مثال:

اشتراک دو بازه زیر را به دست آورید:

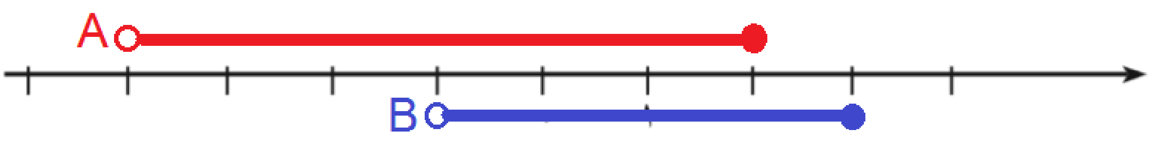
A= (-4 , 2]

B= (-1 , 3]

برای محاسبه اشتراک دو بازه ، به روش زیر عمل می‌کنیم:

گام ۱ : هر دو بازه رو روی محور نمایش میدیم.

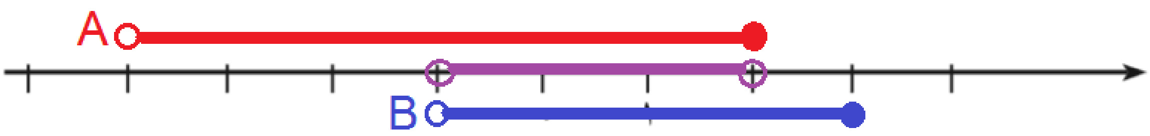
برای اینکه بازه‌ها با هم قاطی نشن، یکیشون رو بالای محور رسم می‌کنیم و یکیشون رو پایین محور



اشتراک دو بازه میشه جاهایی از محور که هر دو بازه حضور دارن، یعنی جاهایی که ما هم خط قرمز داریم و هم خط آبی. بنابراین:

گام ۲ : قسمتی که هر دو بازه وجود دارن رو روی محور مشخص می‌کنیم، ابتدا و انتهای این مقدار رو هم دایره توخالی میزاریم تا بعدا وضعیتشون رو مشخص کنیم.

بنابراین داریم:



همینطور که می‌بینید تنها قسمتی که هم خط آبی داریم و هم خط قرمز، قسمتیه که با رنگ بنفش مشخص کردیم.

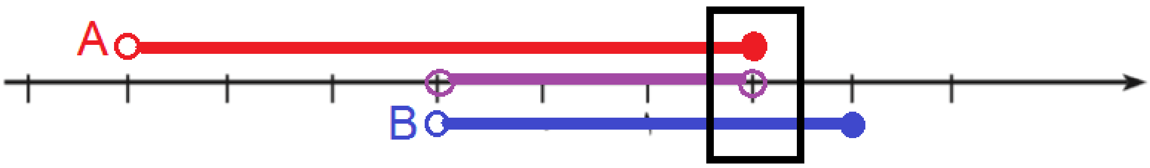
گام ۳ : باید وضعیت دایره های توخالی جواب (یعنی قسمت بنفش) رو مشخص کنیم که ببینیم باید توپر بشن یا توخالی باقی بمونن.

اگه بالا و پایین دایره مورد نظرتوپر بود، ما هم دایره جواب رو توپر میزاریم.

توجه داشته باشید برای اشتراک فقط در صورتی دایره رو توپر میزاریم که هم بالا و هم پایین دایره مورد نظر، توپر باشه.

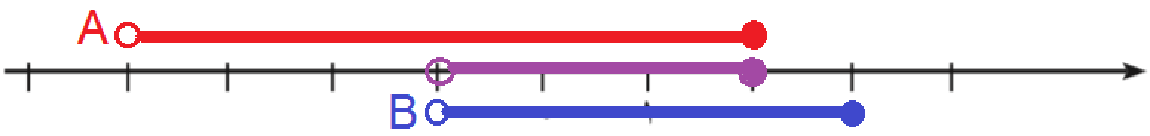
در غیراینصورت اگه بالا یا پایین یا هر دو، توخالی بودن ما هم دایره رو توخالی میزاریم.

حالا دونه دونه بررسی می‌کنیم:

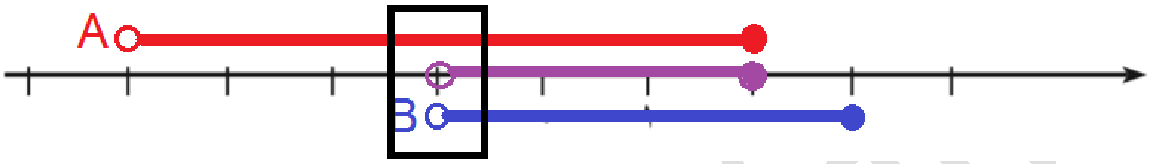


میخوایم تعیین کنیم که دایره بنفش سمت راست رو توپر کنیم یا توخالی بزاریم:

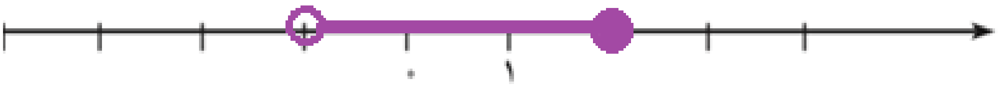
بالا و پایین دایره‌ی بنفش رو نگاه می‌کنیم، بالا دایره توپر داریم، پایین هم خط داریم که به معنی توپر بودنه، بنابراین دایره بنفش سمت راست باید توپر بشه:



حالا میخوایم تعیین کنیم که دایره بنفش سمت چپ باید توپر باشه یا توخالی:



بالا و پایین دایره بنفش رو نگاه می‌کنیم و می‌بینیم که قسمت پایین توخالیه ، پس ما هم دایره بنفش رو توخالی میذاریم(چون گفتیم در صورتی توپر میذاریم که هر دو توپر باشن) ، پس جواب نهایی برابر میشه با:



گام ۴ : جواب رو به صورت بازه می‌نویسیم:

ابتدای شکل چه عددیه؟ ۱-

توپره یا توخالی؟ توخالی

پس بازه باید از سمت ۱- باز باشه، پس باید بنویسیم :

(-1

انتهای شکل چه عددیه؟ ۲

توپره یا توخالی؟ توپر

پس بازه باید از سمت ۲ بسته باشه، بنابراین باید بنویسیم:

(-1 , 2]

ما تونستیم اشتراک دو بازه رو به دست بیاریم. در قسمت بعد اجتماع دو بازه رو یاد می‌گیریم.

اجتماع دو بازه:

مثال:

اجتماع دو بازه زیر را به دست آورید:

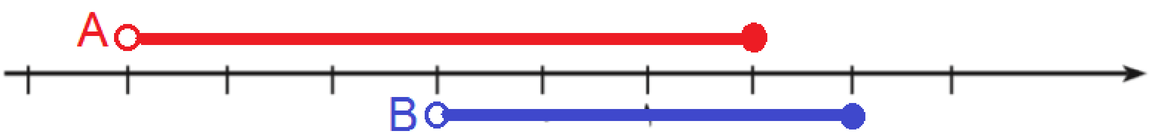
A= (-4 , 2]

B= (-1 , 3]

برای محاسبه اجتماع دو بازه به روش زیر عمل می‌کنیم:

گام ۱ : هر دو بازه رو روی محور نمایش میدیم.

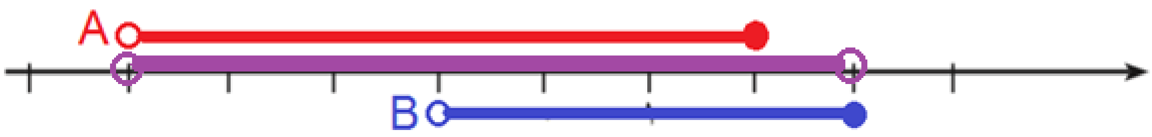
برای اینکه بازه‌ها با هم قاطی نشن، یکیشون رو بالای محور رسم می‌کنیم و یکیشون رو پایین محور



اجتماع دو بازه میشه جاهایی از محور که حداقل یکی از بازه‌ها حضور دارن، یعنی جاهایی که ما یا خط قرمز داریم یا خط آبی یا هردو ، بنابراین:

گام ۲ : این قسمتها رو روی محور مشخص می‌کنیم، ابتدا و انتهای این مقدار رو هم دایره توخالی میذاریم تا بعدا وضعیتشون رو مشخص کنیم.

بنابراین داریم:



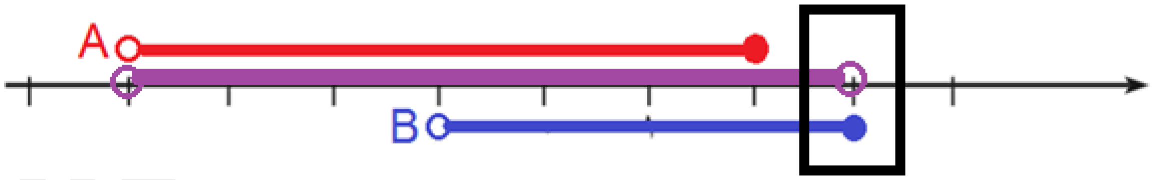
همینطور که می‌بینید قسمتهایی که یا خط آبی داریم یا خط قرمز و یا هردو، قسمتیه که با رنگ بنفش مشخص کردیم.

گام ۳ : باید وضعیت دایره های توخالی جواب (یعنی قسمت بنفش) رو مشخص کنیم که ببینیم باید توپر بشن یا توخالی باقی بمونن.

اگه بالا و پایین دایره مورد نظر توخالی بود، ما هم دایره جواب رو توخالی میذاریم.

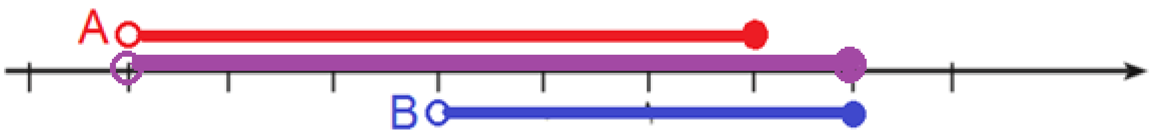
در غیراینصورت اگه بالا یا پایین یا هر دو توپر بود، ما هم دایره رو توپر میذاریم.

حالا دونه دونه بررسی می‌کنیم:

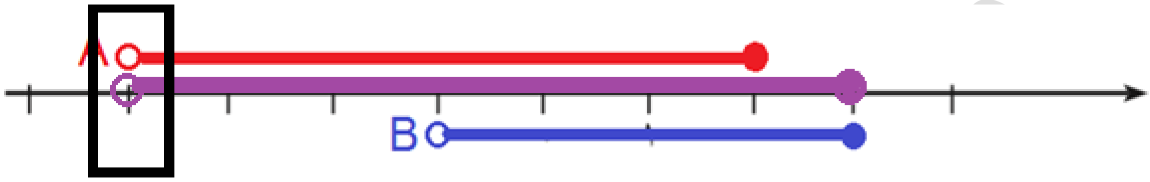


میخوایم تعیین کنیم که دایره بنفش سمت راست رو توپر کنیم یا توخالی بذاریم:

بالا و پایین دایره‌ی بنفش رو نگاه می‌کنیم، گفتیم فقط در صورتی توخالی میمونه که بالا و پایینش توخالی باشه، ولی اینجا دایره پایینش توپره، پس ما هم دایره سمت راست رو توپر می‌کنیم.

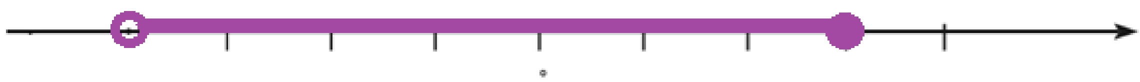


حالا میخوایم تعیین کنیم که دایره بنفش سمت چپ باید توپر باشه یا توخالی؛



بالا و پایین دایره بنفش رو نگاه می‌کنیم :

قسمت بالا توخالیه ، قسمت پایین هم هیچی نداریم، که به معنای توخالی بودنه، پس ما هم دایره بنفش رو توخالی میذاریم



گام ۴ : جواب رو به صورت بازه می‌نویسیم؛

ابتدای شکل چه عددیه؟ ۴-

توپره یا توخالی؟ توخالی

پس بازه باید از سمت ۴- باز باشه، پس باید بنویسیم :

(-4

انتهای شکل چه عددیه؟ ۳

توپره یا توخالی؟ توپر

پس بازه باید از سمت ۳ بسته باشه، پس باید بنویسیم:

(-4 , 3]

پس ما تونستیم اجتماع دو بازه رو به دست بیاریم.

اگه فکر میکنید ممکنه برای تعیین توپر یا توخالی بودن دایره های جواب اشتباه کنید مطلب زیر رو بخونید.

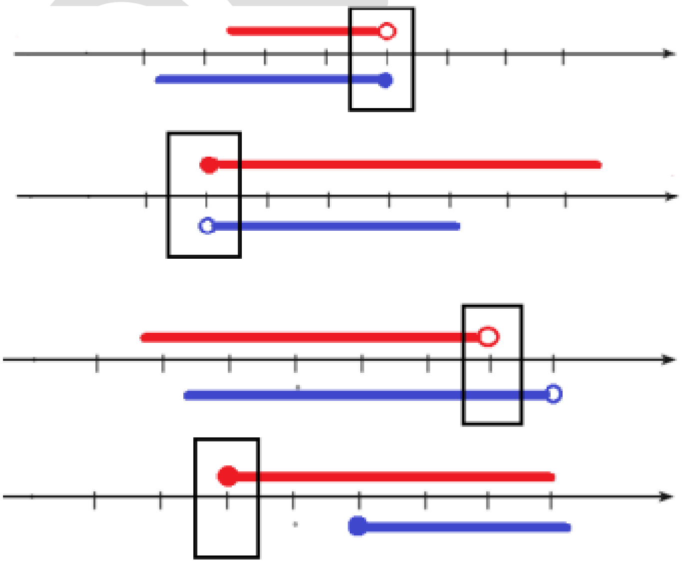
چه در اجتماع و چه در اشتراک:

اگه بالا و پایین هر دو توپر باشه… ← جواب هم توپر میشه.

اگه بالا و پایین هر دو توخالی باشه… ← جواب هم توخالی میشه.

پس اگه بالا و پایین شبیه هم باشه، ما توجهی نمی‌کنیم که داریم اشتراک رو حساب می‌کنیم یا اجتماع، چون تاثیری توی توپر یا توخالی بودن جواب نداره.

چیزی که ما باید بهش دقت کنیم، زمانیه که یکی از دایره ها توخالی باشه و یکی توپر، مثل شکلای زیر:



در اینصورت نتیجه به صورت زیر میشه:

جواب برای اشتراک ··· ← توخالی

جواب برای اجتماع ··· ← توپر

پس یعنی :

اجتماع توپر و توخالی .... میشه توپر

اشتراک توپر و توخالی...... میشه توخالی

تفاضل دو بازه :

قبل از اینکه روش محاسبه تفاضل رو با هم یاد بگیریم، به یه نکته مهم توجه کنید. وقتی ما داریم تفاضل دو تا بازه رو حساب می‌کنیم، چیزی که برامون مهمتره بازه‌ی اوله، یعنی وقتی می‌نویسیم A – B ، چیزی که برای ما مهمه اون مقداری از A هست که باقی میمونه. اگه متوجه نشدید نگران نشید، در ادامه توضیح میدیم:

مثال:

با توجه به بازه‌های زیر ، A-B را به دست آورید:

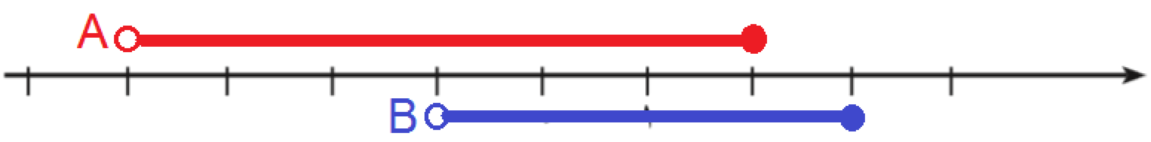
A= (-4 , 2]

B= (-1 , 3]

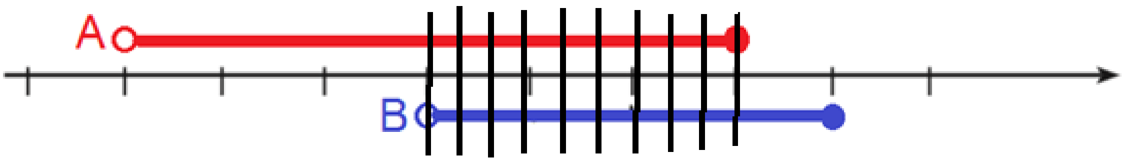
برای محاسبه تفاضل دو بازه به روش زیر عمل می‌کنیم:

گام ۱ : هر دو بازه رو روی محور نمایش میدیم.

برای اینکه بازه‌ها با هم قاطی نشن، یکیشون رو بالای محور رسم می‌کنیم و یکیشون رو پایین محور



گام ۲ : مجموعه اول یعنی A رو در نظر می‌گیریم و جاهایی که با B اشتراک داره رو خط میزنیم. بنابراین داریم:



گفتیم که در تفاضل دو مجموعه یا دو بازه، چیزی که برای ما اهمیت داره، چیزیه که از اولی میمونه، بنابراین اون قسمتی که از B باقی مونده، برای ما اهمیتی نداره.

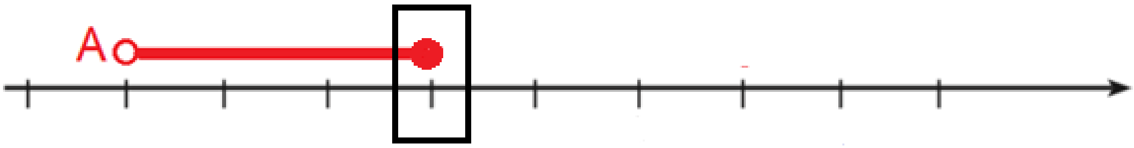
گام ۳ : باید وضعیت اون قسمتی که در محل تماس A و B بوده رو مشخص کنیم و ببینیم که باید توپر باشه یا توخالی.

این قسمتش از اجتماع و اشتراک راحتتره ☺

اگه در قسمت مورد نظر، بازه‌ی دوم توپر بود، جواب تو خالی میشه.

اگه در قسمت مورد نظر، بازه‌ی دوم توخالی بود جواب توپر میشه.

در اینجا مجموعه‌ی B در نقطه‌ای که با A تماس پیدا کرده توخالیه، پس برای جواب ، در اون نقطه A رو توپر میذاریم، به صورت زیر:



یه مثال دیگه از تفاضل حل می‌کنیم:

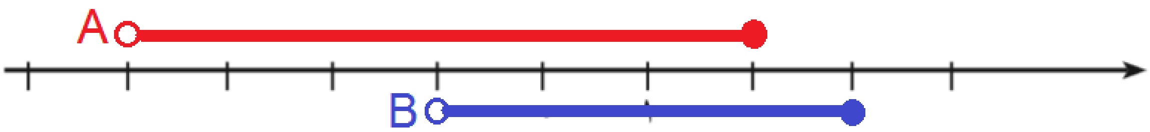
با توجه به بازه‌های زیر ، B-A را به دست آورید:

A= (-4 , 2]

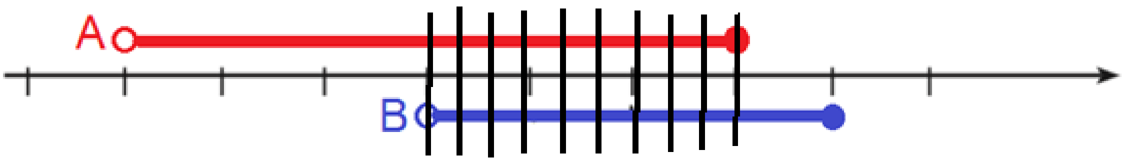
B= (-1 , 3]

گام ۱ : هر دو بازه رو روی محور نمایش میدیم.

برای اینکه بازه‌ها با هم قاطی نشن، یکیشون رو بالای محور رسم می‌کنیم و یکیشون رو پایین محور



گام ۲ : مجموعه اول یعنی B رو در نظر می‌گیریم و جاهایی که با A اشتراک داره رو خط میزنیم. بنابراین داریم:



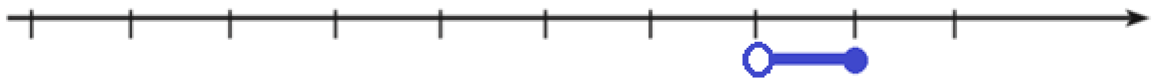
گفتیم که در تفاضل دو مجموعه یا دو بازه، چیزی که برای ما اهمیت داره، چیزیه که از اولی میمونه، بنابراین اون قسمتی که از A باقی مونده، برای ما اهمیتی نداره.

گام ۳ : باید وضعیت اون قسمتی که در محل تماس A و B بوده رو مشخص کنیم و ببینیم که باید توپر باشه یا توخالی. گفتیم که :

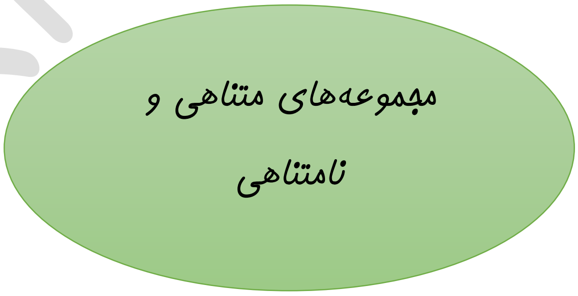
اگه در قسمت مورد نظر، بازه‌ی دوم توپر بود، جواب تو خالی میشه.

اگه در قسمت مورد نظر، بازه‌ی دوم توخالی بود جواب توپر میشه.

در اینجا مجموعه‌ی A در نقطه‌ای که با B تماس پیدا کرده توپره، پس برای جواب ، در اون نقطه B رو توخالی میذاریم، به صورت زیر:



تمرینهای آخر این بخش رو که حل کنیم، کاملا مسلط میشیم به حل سوالات مربوط به اجتماع و اشتراک و تفاضل ☺



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:

فرض کنید از ما میخوان که اعضای مجموعه های زیر رو مشخص کنیم:

A : مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۴

B : مجموعه اعداد صحیح کوچکتر از ۴

اعداد طبیعی کوچکتر از ۴ چه اعدادی هستن؟ ۱ و ۲ و ۳ . پس مجموعه‌ی A برابره با:

A = { ۱ و ۲ و ۳ }

این مجموعه چند تا عضو داره؟ ۳ تا

حالا اعداد صحیح کوچکتر از ۴ چه اعدادی هستن؟ ۳ و ۲ و ۱ و ۰ و ۱- و ۲- و ۳- و ۴- و ۵- و ۶- و ۷- و ۸- و ۹- و ۱۰- و .....

تا کجا ادامه بریم؟ 😐 اصلا تموم میشه این مجموعه؟

حتما میدونید که نه! چون هر چی که بنویسیم باز هم می‌تونیم ادامه بریم، یعنی مجموعه B به صورت زیر میشه:

B = { ۳ و ۲ و ۱ و ۰ و ۱- و ۲- و ۳- و ۴- و ۵- و ۶- و ..... }

این مجموعه چند تا عضو داره؟ همینطور که می‌بینید، تعداد عضوهای این مجموعه رو نمیشه با یه عدد حسابی نشون داد.

این دو مجموعه تفاوت بین مجموعه‌های متناهی و نامتناهی رو نشون میده.

مجموعه‌هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، **مجموعه‌های متناهی** می‌نامیم.

پس اگه ما بتونیم تعداد عضوهای یه مجموعه رو با یه عدد حسابی نشون بریم میگیم اون مجموعه یه مجموعه‌ی متناهیه

چند تا مثال ببینیم، تعیین کنید مجموعه‌های زیر متناهی هستن یا نامتناهی

الف: مجموعه‌ی اعداد اول یکی رقمی

این مجموعه میشه: {۷ و ۵ و ۳ و ۲} ، چند تا عضو داره؟ ۴ تا . پس متناهیه

ب: مجموعه انسانهای روی زمین

انسانهایی که روی زمین زندگی میکنن خیلیییییی زیادن، ولی به هر حال می‌تونیم بگیم چند تا هستن. مثلا آخرین آمار به ما میگه که تعداد افراد روی کره زمین، ۷ میلیارد و ششصد میلیون نفره . چون ما تونستیم این تعداد رو با یه عدد بیان کنیم پس میگیم این مجموعه متناهیه.

یه نکته رو خیلی دقت کنید و اونم اینه که :

تفاوت قائل بشید بین مجموعه ای که تعداد عضواش خیلیییییی زیاده و مجموعه ای که برای تعداد عضواش نمی‌تونیم عدد مشخص کنیم.

مثلا تعداد برنجای داخل یه گونی برنج خیلیییی زیاده ولی در نهایت ما می‌تونیم بشماریم و بگیم مثلا چهارصدهزار تاس

ولی یه مجموعه ای مثل B که در ابتدا مثال زدیم، هیچوقت نمی‌تونیم برای تعداد عضواش عدد بگیم، چون اصلا عضواش ته نداره که بتونیم بشماریم.

امیدوارم تفاوت این دو تا رو درک کرده باشید.

ج: مجموعه اعداد طبیعی فرد

{ ...... ۱۵ و ۱۳ و ۱۱ و ۹ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱ }

آیا می‌تونیم تعداد اعضای این مجموعه رو مشخص کنیم؟ نه . چرا؟ چون ته نداره این مجموعه ، هر چی که بنویسیم بازم می‌تونیم ادامه‌ش بریم.

بنابراین این مجموعه یک مجموعه‌ی نامتناهیه.

د: مجموعه‌ی سلولهای عصبی مغز یک انسان

تعداد سلولهای عصبی مغز یه انسان خیلیییییی زیاده، ولی ته داره! تقریبا برابر ۵۳۰ میلیارد!!!

چون می‌تونیم یه عدد برای این مجموعه مشخص کنیم می‌فهمیم که یک مجموعه‌ی متناهیه.

ه : مجموعه تمام دایره های به مرکز مبدا مختصات

ما می‌تونیم دایره هایی با شعاعهای زیر داشته باشیم:

.... و ۱۰ و ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱

آیا می‌تونیم بگیم چند تا دایره می‌تونیم بکشیم؟ نه! پس این یک مجموعه‌ی نامتناهی هست.

پس ما تفاوت بین مجموعه‌های متناهی و نامتناهی رو یاد گرفتیم.

حل تمرین صفحه ۵

تمرین

۱ فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیر مجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به‌طوری که $C \subseteq D$.

الف:

U = { ۵ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۲۰ ، ۲۵ ، ۳۰ ، ۳۵ ، .... }

ب: نامتناهی

چون ما هر چند تا عضو بنویسیم، باز هم می‌تونیم ادامه بریم و ته نداره!

پ:

{۵ ، ۱۰ ، ۱۵}

ت:

C = { ۵ }

D = { ۵ و ۱۰ }

در اینجا هر عضو مجموعه‌ی C به مجموعه‌ی D هم تعلق داره، پس : $C \subseteq D$

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی.

ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶.

پ) بازه $(\frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۲})$.

ت) $A=\{x\in \mathbb{N} \mid ۱<x<۲\}$.

ث) مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰.

الف: مجموعه‌ی اعداد طبیعی رو می‌نویسیم:

N = { ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ..... }

همینطور که می‌بینیم این مجموعه ته نداره، یعنی نمی‌تونیم تعداد عضوای اون رو با یه عدد طبیعی نشون بدیم، بنابراین این مجموعه نامتناهیه.

ب: شمارنده های طبیعی عدد ۳۶ رو می‌نویسیم:

{ ۱، ۲، ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۸، ۳۶ }

تعداد عضوهای این مجموعه چندتاس؟ ۸ تا

ما تونستیم تعداد عضوها رو با یه عدد طبیعی نشون بدیم، بنابراین این مجموعه، متناهیه.

پ)

این بازه یه زیرمجموعه از R هست، میخوایم ببینیم آیا تعداد عضوهای این بازه رو می‌تونیم بشماریم یا نه.

قبلش باید این رو بدونیم:

بین هر دو عدد همواره بینهایت عدد حقیقی وجود داره، یعنی ما هر دو عدد دلخواهی رو که در نظر بگیریم، هررر چی هم که این دو عدد به هم نزدیک باشن باز هم بینهایت عدد حقیقی بینشون وجود داره.

در اینجا هم دو عدد ابتدا و انتهای بازه رو در نظر بگیرید، بین این دو عدد بینهایت عضو داریم که متعلق به مجموعه‌ی اعداد حقیقیه، پس این مجموعه یک مجموعه‌ی نامتناهی هست.

ت)

مجموعه A یه مجموعه‌ی تهی هست. چون هیچ عدد طبیعی بین ۱ و ۲ وجود نداره. پس این مجموعه یک مجموعه متناهیه

ث)

مجموعه مضربهای طبیعی عدد ۱۰۰ رو می‌نویسیم تا ببینیم متناهیه یا نامتناهی:

$\{ 100 ، 200 ، 300 ، 400 ، 500 ، 600 ، .... \}$

این مجموعه ته داره؟ نه!

ما تا هر جا که بخوایم می‌تونیم ادامه‌ش بریم، بنابراین تعداد عضوهاش رو نمی‌تونیم با یه عدد حسابی نشون بریم، پس یه مجموعه نامتناهیه

ادامه تمرینها رو می‌تونید در " کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam10tr

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها ، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات امتحانی حل شده، به "ریاضی با هم" بپیوندید.